計算の限界

情報Ｉ　第45回授業

08コンピュータとプログラミング

対応ファイル：22exp45.xls

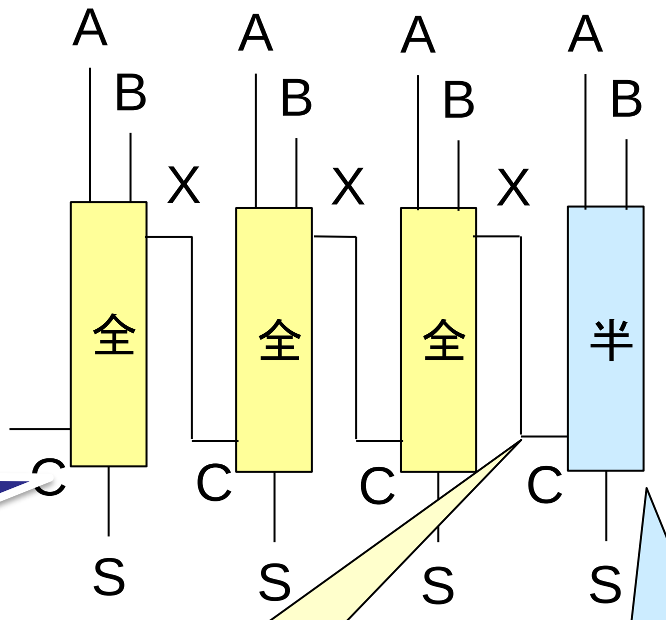
【復習】加算回路を用いた4桁の計算

```
   1 1 0 1   A
 + 1 0 1 1   B
```

C(→X)

1 1 0 …

4桁の計算機は、4桁以内でしか正確に計算できない



繰り上がりのCが、次の全加算機のXの値となっていく

1桁目は前の桁の繰り上がりが無い
→半加算機で良い

例）電卓の計算

- １０桁の電卓で、次の計算結果を見てみよう
  - ■1234567890×10
  - ■0.000000001÷10
  - ■1÷3×3

予備知識（指数法則）

- 累乗は、掛け算・割り算よりも優先して計算
  - 例： $3 \div 2^4 = 3 \div 16$
- $10^a \times 10^b = \underbrace{(10 \times \cdot\cdot \times 10)}_{a個} \times \underbrace{(10 \times \cdot\cdot \times 10)}_{b個}$

  $= 10^{a+b}$
- $10^a \div 10^b = (10 \times \cdot\cdot \times 10) \div (10 \times \cdot\cdot \times 10)$

$$= \frac{\cancel{10 \times 10} \times \cdot\cdot \times 10}{\cancel{10 \times 10 \times \cdot\cdot} \times 10}$$

a個またはb個分
約分される！

$$= 10^{a-b}$$

特に、$10^0 = 1$、 $10^{-a} = \dfrac{1}{10^a}$ 、 $10^{-1} = 0.1$

練習

- Excelを開き、

１．セルA1 に「4.3」、セルA2 に「4.2」を入力

２．セルA3 に「=A1−A2」を入力

３．セルA1からA3を選択し、

ー 右クリックから「セルの書式設定」を選び、
「数値」を選択する。

ーA列とB列の境目をドラッグしA列幅を大きく広げる

→ 起きている現象の理由を考えてみよう。

浮動小数点数

- 非常に小さな数値から大きな数値まで表すために、小数点位置をずらして表現

（理科の有効数字等で良く利用される！）

符号　仮数　指数

例1）　123450000000 → 1.2345 $\times 10^{11}$

例2）－0.00000054321 → －5.4321 $\times 10^{-7}$

※10^0 ＝ 1、 10^{-1} ＝ 0.1 に注意！

※仮数は 最上位（一番左）桁を0以外の数値にする

※ソフトによっては「$\times 10^{11}$」を「E+11」等と表現される

例） -5.4321×10^{-7} ⇒ -5.4321E-07

2進法と浮動小数点（1）（p.127）

- ２進法でも、浮動小数点表示がある！
  - ただし、$0.1_{(2)}=0.5_{(10)}$であることに注意！
- 「IEEE754」という国際規格が定められている

★32ビット単精度浮動小数点数の構成

仮数の整数部を常に1として考える。

符号部（1bit）　指数部（8bit）　仮数部の小数点以下のみ（23bit）

例：01110111010101000011111010001000

$2^8=256$、うち特別な場合を除き、-126～127、よって $2^{127}≒10^{38}$、10進法で38ケタ程度まで扱える

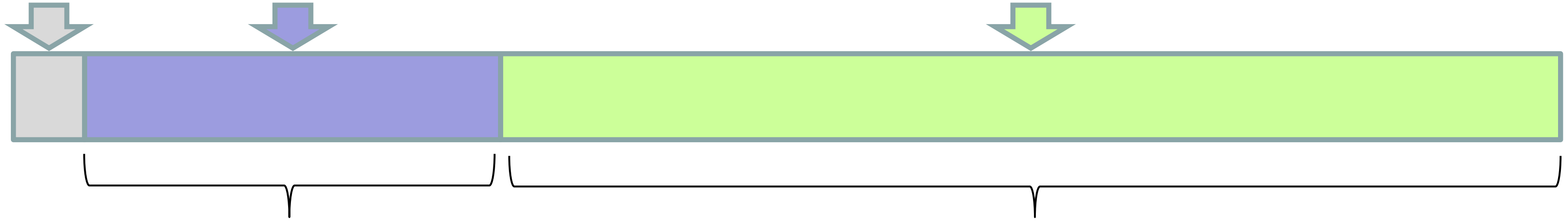
$2^{(23+1)}≒10^7$　なので10進法で7桁程度の精度

2進法と浮動小数点（2）

★64ビット倍精度浮動小数点数の構成

仮数の整数部を常に1として考える。

符号部（1bit）　指数部（11bit）　仮数部の小数点以下のみ（52bit）



2^{11}＝2048、うち特別な場合を除き、
－1022～1023、よって $2^{1023} \fallingdotseq 10^{307}$、
仮数部と併せ308ケタ程度まで扱える

$2^{(52+1)} \fallingdotseq 10^{15}$　なので
10進法で15桁程度の精度

※現在のコンピュータのCPUは64bitが主流であり、また、専用の計算回路がついているため、倍精度を使うことが多い。

誤差

コンピュータは、扱える数に限界があり、場合によっては概数で計算している

→　本質的に誤差を含んでいる可能性！

誤差が起きる場合

1. コンピュータが扱える数の範囲の限界
   オーバーフロー、アンダーフロー　など
2. 無理数や循環小数などによる誤差
   丸め誤差、打ち切り誤差　など
3. 絶対値が近い数の差、絶対値が非常に大きい数と小さい数の和や差など、演算による誤差
   桁落ち、情報落ち　など

問い（考えてみよう）

① 先のExcelの問題で、４．３－４．２ を、できるだけ精度を高く行うにはどうしたら良いか。

② １０桁の電卓で、1000000000＋0.4＋0.4＋0.4 を、できるだけ精度を高く行うにはどうすれば良いか。

計算の限界　まとめ

- コンピュータの計算には、「限界」がある！
  - メモリの限界、扱える範囲の限界、桁数の限界・・
  - 常に厳密で正確な計算、というわけではない！
  - 「おおよその値」という場合もあることを意識！
- 特性を理解して、精度の高い活用を！
  - 小数を使う時は、丸め誤差に要注意！
  - 絶対値の差が非常に大きい時は、小さい数から計算！
  - 引き算よりも、足し算になるよう心掛けよう！